SIMULASI MODEL EPIDEMIK TIPE SIR DENGAN STRATEGI VAKSINASI DAN TANPA VAKSINASI

Siti Komsiyah

Mathematics & Statistics Department, School of Computer Science, Binus University
Jl. K.H. Syahdan No. 9, Palmerah, Jakarta Barat 11480
citie_math@binus.ac.id

ABSTRACT

In some diseases caused by viruses, a person or child infecteced a virus will be infected again with a more serious form. Therefore, the vaccine to prevent the occurrence of more serious needs to be done at a certain population. This paper will discuss the type of SIR epidemic models which will be compared to the results of the analysis model both with vaccination and without vaccination. Analyzing the model will identify the basic reproductive number as benchmark whether disease is spread in a population. The simulation of results of stability model analysis will better explain the description of the epidemic SIR model.

Keywords: *SIR model, basic reproductive number, vaccination, stability analysis*

ABSTRAK

Pada beberapa penyakit yang disebabkan oleh virus, seseorang atau anak yang sudah terjangkit virus dapat terjangkit kembali dengan tingkat yang lebih parah. Oleh karena itu pemberian vaksin untuk mencegah terjadinya penularan yang lebih serius perlu dilakukan pada suatu populasi tertentu. Pada paper ini akan dibahas model epidemik tipe SIR di mana akan dibandingkan hasil analisis model dengan vaksinasi dan tanpa vaksinasi. Dengan menganalisis model akan diketahui bilangan reproduksi dasar sebagai tolok ukur terjadi atau tidaknya penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Simulasi hasil analisis kestabilan model akan lebih memperjelas deskriptif dari model epidemik SIR tersebut.

Kata kunci: *model epidemik tipe SIR, bilangan reproduksi dasar, vaksinasi, analisis kestabilan*

PENDAHULUAN

Pada penyebaran penyakit menular, ada beberapa sistem kompartemen yang dapat dipakai di antaranya sistem SIS, SIR, SEIR, SEIRS, MSEIR dan sebagainya (Murray, 1989), (Hethcote, 2000). Ada dua hal mendasar dalam pemodelan epidemik, yaitu menentukan model yang sesuai dengan karakteristik lapangan berdasarkan data yang dimiliki dan menentukan metode penyelesaian dari model tersebut sehingga dapat memberikan jawaban secara akurat terhadap permasalahan yang ada (Iannelli, 1992).

Pada paper ini, akan dibahas penyebaran penyakit yang disebabkan oleh virus dengan model tipe SIR (Pathak, et al., 2010). Penyebaran penyakit yang terjadi menyebabkan beberapa macam individu yang ada dalam suatu populasi di mana ada individu yang tetap sehat, ada individu yang sakit karena terinfeksi oleh virus dan ada yang sesudah sakit kemudian sembuh (*recovery*). Oleh karena itu, populasi dibagi dalam beberapa kelas yaitu individu yang sehat, terinfeksi dan sembuh yang digambarkan dalam model kompartemen SIR. Untuk selanjutnya akan dibandingkan solusi model epidemik dengan pemberian vaksinasi konstan (Maharwati, 2003) dan tanpa vaksinasi untuk dianalisis penyelesaiannya, menentukan bilangan reproduksi dasar (ρ) yaitu suatu bilangan sebagai tolok ukur (nilai threshold) terjadi tidaknya suatu epidemik dan menentukan titik kesetimbangan dari model, menentukan jenis kestabilannya serta melakukan simulasi model epidemic terhadap parameter-parameter yang digunakan.

METODE

Metode yang digunakan dalam paper ini adalah metode deskriptif melalui studi literatur untuk mempelajari hal–hal yang berkaitan dengan beberapa model epidemik dan menganalisisnya, memodelkan penyebaran penyakit tipe SIR dengan vaksinasi konstan dan tanpa vaksinasi, mensimulasikan program dari penyebaran penyakit dengan tipe SIR dengan vaksinasi konstan dan tanpa vaksinasi, membandingkan perkembangan penyebaran penyakit model SIR dengan vaksinasi dan tanpa vaksinasi, menghitung bilangan reproduksi dasar dari model epidemik yang didapatkan melalui analisis stabilitas dari setiap titik kritisnya serta memberikan hasil perbandingan dari model epidemic tipe SIR dengan vaksinasi dan tanpa vaksinasi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model Epidemic Tipe SIR

Penyebaran penyakit yang terjadi menyebabkan beberapa macam individu yang ada dalam suatu populasi. Ada individu yang tetap sehat, ada individu yang sakit karena terinfeksi oleh virus dan ada yang sesudah sakit kemudian sembuh atau recovery. Oleh karena itu, anggota populasi dibagi dalam beberapa kelas yang dideskripsikan pada Tabel 1 sehingga model epidemik ini disebut model SIR.

Tabel 1 Deskripsi anggota Populasi

Kelas	Keterangan
S	Individu yang sehat / Susceptible
I	Individu yang terinfeksi / Infected
R	Individu yang sembuh / Recovery

Jika populasi dinormalisasi ke 1, diperoleh: S + I + R = 1, untuk setiap t. Sedangkan untuk parameter epidemik yang digunakan dalam model matematikanya diberikan dalam Tabel 2.

Tabel 2 Parameter epidemik

Kelas	Keterangan
δ	laju kelahiran dan kematian
β	laju kontak penularan virus
υ	laju recovery
p	laju vaksinasi

Bentuk persamaan model epidemik tipe SIR dituliskan dalam persamaan (1) sampai dengan (3) berikut di bawah ini:

$$\frac{dS}{dt} = \delta - (\beta I + \delta)S \tag{1}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta IS - (\delta + \upsilon)I \tag{2}$$

$$\frac{dR}{dt} = \upsilon I - \delta R \tag{3}$$

Penyebaran penyakit dalam suatu populasi dapat dihambat dengan memberikan vaksinasi kepada masing-masing individu yang baru lahir. Oleh karena itu, akan diberikan model epidemik tipe SIR yang masing-masing individunya tidak diberikan vaksinasi dan yang diberikan vaksinasi untuk dibandingkan bagaimana penyebaran penyakitnya. Setelah persamaan $\frac{dS}{dt}$ di analisis dan disesuaikan dengan laju vaksinasi pada interval $0 < p < 1$, sehingga persamaannya menjadi persamaan (4) berikut

$$\frac{dS}{dt} = (1 - p)\delta - (\beta I + \delta)S \tag{4}$$

Model SIR Tanpa Vaksinasi

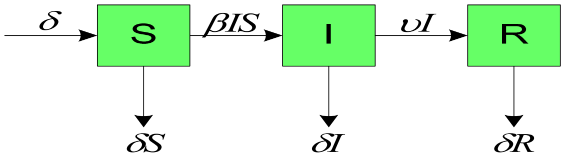
Persamaan model epidemik tipe SIR yang tanpa vaksinasi dituliskan pada persamaan (5) sampai dengan (8) sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \delta - (\beta I + \delta)S \tag{5}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta IS - (\delta + \upsilon)I \tag{6}$$

$$\frac{dR}{dt} = \upsilon I - \delta R \tag{7}$$

Gambar kompartemen model tipe SIR tanpa vaksinasi dapat dilihat pada Gambar 1 dibawah:



Gambar 1 Gambar kompartemen model SIR tanpa vaksinasi.

Pada model SIR tanpa vaksinasi, pertama akan dikondisikan *steady state* (seimbang), yaitu dengan penyelesaian persamaan sesuai persamaan (8) dan (9).

$$\frac{dS}{dt} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{dI}{dt} = 0 \tag{9}$$

Untuk menentukan kestabilan dari penyelesaian tersebut digunakan matrik Jacobian sesuai persamaan (10) berikut:

$$J = \begin{pmatrix} -(\beta I + \delta) & -\beta S \\ \beta I & \beta S - (\delta + v) \end{pmatrix} \tag{10}$$

Dengan menamakan (S^*, I^*) ini adalah kondisi stabil, yaitu apabila

$$\det \, J\Big|_{(S^*, I)} > 0 \tag{11}$$

$$\mathrm{Tr} \;\; J\Big|_{(S^*, I)} < 0 \tag{12}$$

Parameter bifurkasi yang didapatkan adalah $\sigma = \dfrac{\beta}{\delta + v}$ yaitu suatu bilangan yang menentukan terjadi tidaknya penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Selanjutnya dipilih pada kondisi *steady state*-nya pada persamaan (13) dan (14).

$$\begin{pmatrix} S_1^* \\ I_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix} S_2^* \\ I_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^{-1} \\ \dfrac{\delta}{\beta}(\sigma - 1) \end{pmatrix} \tag{14}$$

Jika matriks Jacobian pada persamaan (15) diselesaikan, diperoleh hasil pada persamaan (16) dan (17) seperti berikut:

$$J_1 = J\Big|_{(S_1^*, I_1^*)} \text{ dan } J_2 = J\Big|_{(S_2^*, I_2^*)} \tag{15}$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} -\delta & -\beta \\ 0 & \beta - (\delta + v) \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} -\delta\sigma & -\dfrac{\beta}{\sigma} \\ \delta(\sigma - 1) & 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Stabilitas dari J_1 dan J_2, diperoleh dengan menentukan nilai dari

State (kondisi) 1

$$\det J_1 = (-\delta)(\beta - (\delta + v)) > 0 \text{ maka } \beta < \delta + v \text{ sehingga } \sigma < 1$$

$$\text{Tr } J_1 = -\delta + \beta - (\delta - v) < 0 \text{ maka } \beta < \delta + (\delta + v) \text{ sehingga } 1 < \frac{\delta}{\beta} + \sigma$$

State (kondisi) 2

$$\det J_2 = \frac{\beta\delta}{\sigma}(\sigma - 1) > 0 \text{ maka } \sigma > 1$$

$$\text{Tr } J_2 = -\delta\sigma < 0 \text{ maka } \sigma > 0$$

Kondisi stabilitas diperoleh sebagai berikut:
Pada *state* 1, kestabilan didapatkan bila $\sigma < 1$. Oleh karena penyakit telah berkurang, pada banyak kasus temasuk ($\sigma < 1$), individu kelas I menghilang.

Pada *state* 2, kestabilan didapatkan bila $\sigma > 1$. Karena $S_2^* = \sigma^{-1}$ dan $I_2^* = \dfrac{\delta}{\beta}(\sigma - 1)$. maka $S < 1$ dan $I > 0$.

Oleh karena titik ini adalah stabil, dan 1 = S + I + R, kelas S akan memenuhi seluruh populasi sehingga kelas I akan menghilang. Dengan catatan bahwa, kasus $\sigma = 1$, artinya $(S_1^*, I_1^*) = (S_2^*, I_2^*)$ sehingga σ dapat dinyatakan sebagai parameter bifurkasi yang hanya terjadi ketika terjadi penyebaran penyakit dalam populasi, yaitu apabila $I_2^* > 0$ saat $\sigma > 1$.

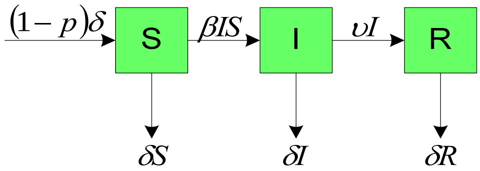
Model SIR dengan Vaksinasi Konstan

Untuk model dengan vaksinasi konstan, semua individu yang baru lahir divaksinasi dengan rata-rata kesuksesan antara 0 < p <1, maka terbentuk persamaan baru sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = (1 - p)\delta - (\beta I + \delta)S \tag{18}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta IS - (\delta + \upsilon)I \tag{19}$$

Gambar 2 adalah model Kompartemen tipe SIR dengan vaksinasi konstan.



Gambar 2 Gambar kompartemen model SIR dengan vaksinasi konstan.

Akan diselesaikan persamaan $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = 0$ sehingga didapatkan matriks Jacobian J_1 dan J_2

dengan kondisi stabilitasnya pada persamaan (20) dan (21).

$$\begin{pmatrix} S_1^* \\ I_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p \\ 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$\begin{pmatrix} S_2^* \\ I_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^{-1} \\ \frac{\delta}{\beta}(\sigma(1-p)-1) \end{pmatrix} \tag{21}$$

Matriks Jacobian J adalah sama dan dinotasikan dengan J_1, J_2 sehingga kondisi stabilitas akan terlihat sesuai persamaan (22) sampai dengan (25).

$$\det J_1 = (-\delta)(\beta(1-p) - \beta\sigma) > 0 \text{ maka } (1-p) < \sigma \quad \text{sehingga } 1-\sigma < p \tag{22}$$

$$\text{Tr } J_1 = -\delta + \beta(1-p) - \beta\sigma < 0 \text{ maka } (1-p) < \frac{\delta}{\beta} + \sigma \text{ sehingga } (1-\sigma) - \frac{\delta}{\beta} < p \tag{23}$$

$$\det J_2 = \frac{\beta\delta}{\sigma}(\sigma(1-p)-1) > 0 \text{ maka } p < \frac{\sigma-1}{\sigma} \tag{24}$$

$$\text{Tr } J_2 = -\delta\sigma(1-p) < 0 \text{ maka } p < 1 \tag{25}$$

Kemudian, ada suatu titik kritis p_c untuk proposi vaksinasi di mana:
Pada *state* 1, $p_c = 1-\sigma$. Apabila $p > p_c$ didapatkan I = 0. Apabila $p < p_c$, maka $S_1^* = 1-p > 1-p_c = \sigma$ maka $S_1^* > \sigma$.

Pada *state* 2, $p_c = \frac{\sigma-1}{\sigma}$.
Untuk $p < p_c$ sistem persamaan akan mendekati stedy *state* sebagaimana ditunjukkan diatas.
Untuk $p > p_c$ didapatkan $p > \frac{\sigma-1}{\sigma}$ maka $\sigma < \frac{1}{1-p}$ sehingga

$$I^* = \frac{\delta}{\beta}(\sigma(1-p)-1) \quad < \frac{\delta}{\beta}\left(\frac{1-p}{1-p} - 1\right) \quad = 0$$

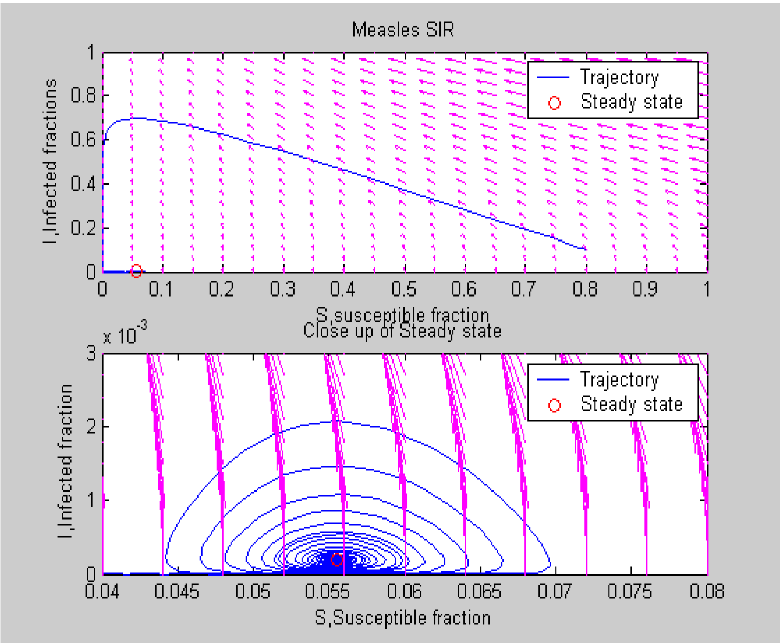
Dengan demikian untuk $p > p_c$ maka individu terinfeksi kelas I akan menghilang.

Pengaruh dari adanya p pada kondisi *steady state* adalah sebagai berikut:
S_1^* tergantung linearitas dari *p*, dan I^* tidak bergantung pada *p*. p_c berkaitan pada $S_1^* = \sigma$.
Untuk *state* 2, S_2^* tidak bergantung pada p dan I_2^* bergantung linear pada p. pc berkaitan dengan $I_2^* = 0$

Sebagai catatan bahwa, apabila $\sigma = 1 - p$, yaitu bila p = p_c. kondisi 1 dan 2 terjadi bersamaan. σ sebagai parameter dalam bifurkasi. Penyebaran penyakit dalam populasi terjadi hanya jika ketika $I_2^* > 0$ yaitu pada $\sigma > \dfrac{1}{1-p}$. Secara efektif kenaikan p membutuhkan σ yang lebih tinggi untuk suatu penyakit yang sudah tersebar.

Hasil Simulasi Model

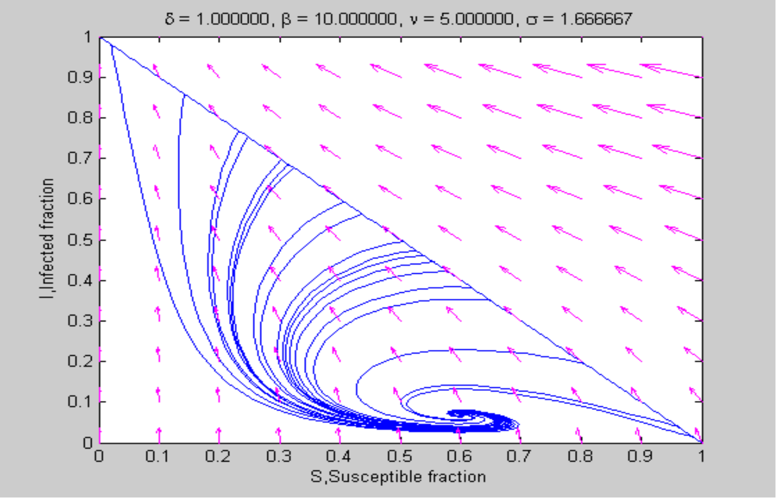
Gambar 3 berikut ini adalah hasil komparasi dari model epidemik dan parameter measles.



Gambar 3 Model SIR untuk parameter Measles tanpa vaksinasi.

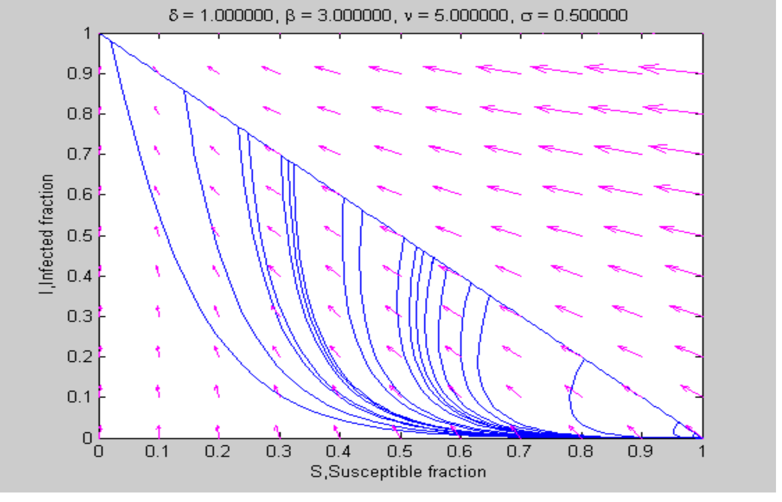
Pada Gambar 3 diatas terdapat dua macam grafik. Grafik pertama menunjukkan kejadian empiris bahwa tipe parameter untuk measles yaitu: δ = 0.02 , β = 1800, dan ν = 100 sehingga menghasilkan Ro (σ) = $\dfrac{30000}{1667} > 1$, dengan demikian didapatkan sistem kestabilan dengan $I_2^* > 0$ (Gambar 4). Sedangkan grafik kedua menunjukkan gambaran secara jelas dari kondisi *steady state* 2 yaitu $(S_2^*, I_2^*) \approx (0.055567, 0.000189)$.

Gambar 4 di bawahini didapat dengan menginputkan parameter-parameternya, yaitu δ = 1 , β = 10 dan v = 5 sehingga diperoleh Ro (σ) = 1,666667. Dengan parameter ini akan dihasilkan titik stabil spiral yaitu apabila $I_2^* > 0$.



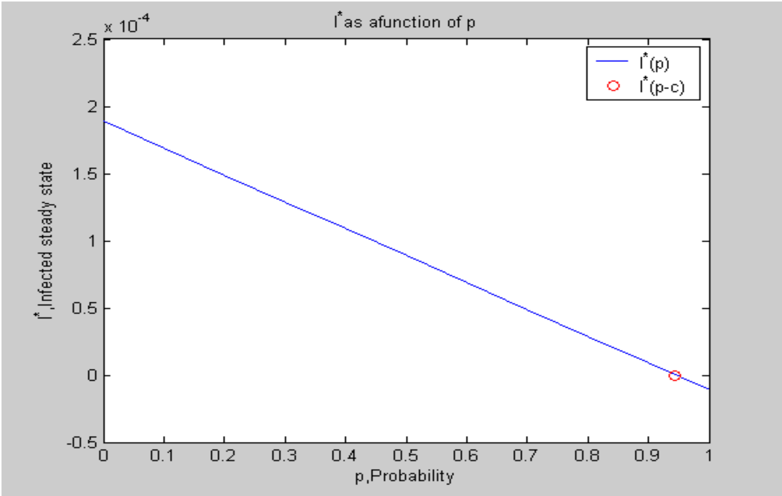
Gambar 4 Model SIR dengan stabil spiral, $I_2^* > 0$.

Gambar 5 di bawah ini diperoleh dengan menginputkan parameter –parameternya adalah δ = 1 , β = 3 dan v = 5 sehingga diperoleh Ro(σ) = 0.5 di mana didapatkan individu yang terinfeksi menghilang atau $I_2^* = 0$.



Gambar 5 Model SIR dengan $I_2^* = 0$.

Gambar 6 diperoleh dengan menghitung nilai p_c untuk Measles di mana nilai Ro(σ) = $\frac{30000}{1667}$ sehingga didapatkan nilai $p_c = \frac{28333}{30000} \approx 0.944433$. Oleh karena itu untuk Measles diperoleh rata-rata laju efektif vaksinasi sebesar 94.4%.



Gambar 6 Kelas terinfeksi pada kondisi *steady state* I^* sebagai fungsi p

SIMPULAN

Dengan adanya model epidemik yang telah dibahas penulis dapat memberikan gambaran dari suatu penyakit menular khusunya measles. Oleh karena itu, dapat diketahui karakteristik dari penyakit tersebut yang telah dipelajari sehingga membantu untuk memodelkan kestabilannya sehingga untuk kedepannya penyakit tersebut dapat hilang dari populasi. Dengan membandingkan dua model epidemic tipe SIR dengan vaksinasi dan tanpa vaksinasi, dapat diambil kesimpulan bahwa pemberian vaksinasi mampu menghambat penyebaran penyakit secara efektif daripada tanpa pemberian vaksinasi meskipun dengan rata laju vaksinasi yang tidak sempurna. Sebagai contoh Measles hanya didapatkan efektif sekitar 94.4%.

DAFTAR PUSTAKA

Hethcote, H.W. (2000). *The Mathematic model of Infectious Diseases. Lowa City: Department of Mathematics, University of Lowa.*

Iannelli, M. (1992). *The Mathematical Description of Epidemics: Some Basic Models and Problems*. Trent: Dipartimento di Matimatica, Universita di Trento.

Maharwati, H. (2003). *Model Epidemik dengan Jumlah Populasi Konstan dan Vaksinasi*.

Murray, J. D. (1989). *Mathematical Biology (edisi kedua, volume 19). Berlin: Springer-Verlag.*

Pathak, S., Maiti, A., dan Samanta G.P. (2010). *Rich Dynamics of an SIR Epidemic Model*. Shibpur: Department of Mathematics, Bengal Engineering and Science University.

Skripsi tidak diterbitkan. Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.